BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐHSP - ĐHTN

HÀ VĂN KHẨN

TÍNH HYPERBOLIC GROMOV VÀ METRIC KOBAYASHI TRÊN MIỀN GIẢ LỒI CHẶT

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Chuyên ngành : TOÁN GIẢI TÍCH
Mã số : 8460102

Người hướng dẫn khoa học:
TS. TRẦN HUỆ MINH

THÁI NGUYÊN - 2018

LỜI CAM ĐOAN

Em xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng em dưới sự hướng dẫn của TS. Trần Huệ Minh. Em không sao chép từ bất kì công trình nào khác.

Các tài liệu trong luận văn là trung thực, em kế thừa và phát huy các thành quả khoa học của các nhà khoa học với sự biết ơn chân thành.

Thái Nguyên, tháng 4 năm 2018

Người viết luận văn

Hà Văn Khẩn

LỜI CẢM ƠN

Trước khi trình bày nội dung chính của khóa luận, em xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới Tiến sĩ Trần Huệ Minh, người đã tận tình hướng dẫn và truyền đạt những kinh nghiệm học tập, nghiên cứu để em có thể hoàn thành luận văn này.

Em cũng xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành tới Phòng Đào tạo - Bộ phận Sau Đại học, Ban chủ nhiệm Khoa Toán, các thầy cô giáo Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên và Viện Toán học đã giảng dạy và tạo điều kiện thuận lợi cho em trong quá trình học tập và nghiên cứu khoa học.

Nhân dịp này em cũng xin được gửi lời cảm ơn chân thành tới gia đình, bạn bè đã luôn bên em, cổ vũ, động viên, giúp đỡ em trong suốt quá trình học tập nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Do thời gian thực hiện luận văn không nhiều, kiến thức còn hạn chế nên bài luận văn không tránh khỏi những khiếm khuyết vì vậy rất mong nhận được sự đóng góp ý kiến của các thầy cô giáo và các bạn học viên để luận văn này được hoàn chỉnh hơn. Xin chân thành cảm ơn!

Thái Nguyên, tháng 4 năm 2018

Người viết luận văn

Hà Văn Khẩn

Mục lục

Mở đầu

1. Lý do chọn đề tài

Khái niệm không gian hyperbolic Gromov được giới thiệu bởi M. Gromov từ những năm 1980 và đã được nghiên cứu, phát triển bởi nhiều tác giả ([6],[7],[8],[9],...). Việc tìm kiếm các ví dụ về không gian hyperbolic Gromov, mô tả các không gian hyperbolic Gromov hay tìm mối quan hệ giữa các không gian hyperbolic nhận được sự quan tâm của nhiều nhà khoa học, chẳng hạn Z. Balogh & M.Bonk [1] đã chỉ ra sự liên hệ giữa metric Kobayashi và tính hyperbolic Gromov trên một iền giả lồi chặt, M.Bonk, J.Heinonen & P.Koskela [10] đã nghiên cứu tính hyperbolic Gromov của metric tựa hyperbolic, Z.Balogh & S.Buckley [2] đã chỉ ra điều kiện để một không gian tựa hyperbolic là hyperbolic Gromov, F.Bertrand & H.Gaussier [5] đã nghiên cứu tính hyperbolic Gromov của miền giả lồi mạnh trong một đa tạp hầu phức, ...

Đề tài luận văn "*Tính hyperbolic Gromov và metric Kobayashi trên các miền giả lồi chặt*" là một đề tài có ý nghĩa thời sự, đã và đang được nhiều nhà toán học trong và ngoài nước quan tâm nghiên cứu.

2. Mục đích và nhiệm vụ nghiên cứu

2.1. Mục đích nghiên cứu

Mục đích của luận văn là tìm hiểu và trình bày lại một số kết quả về không gian hyperbolic Gromov, sử dụng nguyên lý của lý thuyết các không gian hyperbolic Gromov để ước lượng cho hàm khoảng cách tương ứng với metric Kobayshi trên một miền giả lồi chặt với biên trơn lớp C^2 và nghiên cứu tính hyperbolic Gromov của miền này.

2.2. Nhiệm vụ nghiên cứu

Trình bày tổng quan và hệ thống một số kết quả về tính hyperbolic Gromov và metric Kobayashi trên miền giả lồi chặt.

3. Phương pháp nghiên cứu

Sử dụng kết hợp nhiều phương pháp như: Thu thập dữ liệu, phân tích, so sánh, tổng hợp và trình bày đề tài.

4. Bố cục của luận văn

Nội dung luận văn được viết chủ yếu dựa trên tài liệu [1], gồm 42 trang, trong đó có phần mở đầu, hai chương nội dung, phần kết luận và danh mục tài liệu tham khảo. Cụ thể là:

- Mở đầu: Trình bày lý do chọn đề tài, mục tiêu, đối tượng và phạm vi nghiên cứu, ý nghĩa khoa học và thực tiễn của đề tài nghiên cứu, phương pháp nghiên cứu.
- Chương 1: Trình bày tổng quan và hệ thống một vài kiến thức về miền giả lồi chặt, metric Carnot-Carathéodory, metric Finsler, metric Kobayashi, không gian hyperbolic Gromov và một số ví dụ cụ thể về không gian này.
- Chương 2: Là nội dung chính của luận văn, trình bày về tính hyperbolic Gromov và metric Kobayashi trên miền giả lồi chặt. Phần đầu của chương trình bày một ước lượng cho hàm khoảng cách tương ứng với metric Kobayashi trên một miền giả lồi chặt với biên trơn lớp C^2. Phần thứ hai của chương trình bày về tính hyperbolic Gromov của một miền giả lồi chặt với biên trơn lớp C^2.
- Kết luận: Trình bày tóm tắt kết quả đạt được và tài liệu tham khảo.

Luận văn được hoàn thành tại trường Đại học Sư phạm Thái Nguyên dưới sư hướng dẫn khoa học của TS. Trần Huệ Minh. Em xin được bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc nhất tới cô giáo hướng dẫn và trường Đại học Sư Phạm - Đại học Thái Nguyên đã tạo mọi điều kiện thuận lợi để em hoàn thành khóa học này.

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

1.1 Miền giả lồi chặt

Cho $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n, n \geq 2$ là một miền bị chặn trong $\mathbb{C}^n$, đặt

$$\delta(x) = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$$

là khoảng cách Euclid của môt điểm tới biên của Ω.

Ta xét hàm khoảng cách $\rho : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$\rho(x) = \begin{cases} -\delta(x) & \text{nếu } x \in \Omega, \\ \ \ \delta(x) & \text{nếu } x \in \mathbb{C}^n \setminus \Omega. \end{cases}$$

Miền Ω được gọi là miền giả lồi chặt với biên trơn lớp C^2 nếu hàm ρ là trơn lớp C^2 trong lân cận mở $N_\varepsilon(\partial\Omega) = \{x \in \mathbb{C}^n \mid \delta(x) < \varepsilon\}$ của Ω và ta có $\Omega = \{x \in \mathbb{C}^n \mid \rho(x) < 0\}$, hơn nữa với $p \in \partial\Omega$ và $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ thì

$$\sum \frac{\partial^2 \rho(p)}{\partial \zeta \nu \partial \overline{\zeta}_\mu} z_\nu \overline{z}_\mu > 0, \qquad \text{với } z \neq 0.$$

Ta cũng có thể định nghĩa miền giả lồi chặt theo cách khác như sau: Với mỗi $p \in \partial\Omega$, ta gọi không gian tiếp xúc $T_p\partial\Omega$ tại p là tập

$$T_p\partial\Omega = \{z \in \mathbb{C}^n : \operatorname{Re} < \overline{\partial}\rho(p), z >= 0\},$$

trong đó

$$\overline{\partial}\rho(p) = \left(\frac{\partial \rho}{\partial \overline{\zeta_1}}(p), \ldots, \frac{\partial \rho}{\partial \overline{\zeta_n}}(p) \right),$$

và

$$< z, \omega > := \sum_{\nu=1}^{n} z_\nu \overline{\omega}_\nu,$$

là tích Hermite chính tắc của hai véc tơ $z = (z_1, \dots, z_n)$ và $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ trong $\mathbb{C}^n$.

Xét không gian con

$$\mathcal{H}_p\partial\Omega = \{z \in \mathbb{C}^n \mid < \overline{\partial}\rho(p), z >= 0\},$$

Ta định nghĩa dạng Levi $\mathrm{L}_\rho(p;\cdot)$ như sau:

$$\mathrm{L}_\rho(p;z) = \sum_{\nu,\mu=1}^{n} \frac{\partial^2\rho}{\partial z_\nu \partial \overline{z}_\mu}(p) z_\nu \overline{z}_\mu\ , \quad \text{với } z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n.$$

Ta nói Ω là miền giả lồi chặt nếu dạng Levi $\mathrm{L}_\rho(p;\cdot)$ là xác định dương trên $\mathcal{H}_p\partial\Omega$ với $p \in \partial\Omega$.

1.2 Metric Carnot-Carathéodory

Cho Ω là một miền giả lồi chặt. Ta gọi đường cong trơn lớp C^1 từng khúc $\alpha : [0;1] \to \partial\Omega$ là ngang nếu với mỗi $t \in [0;1]$ mà $\dot{\alpha}(t)$ tồn tại thì $\dot{\alpha}(t) \in \mathcal{H}_{\alpha(t)}\partial\Omega$.

Ta định nghĩa độ dài Levi của đường cong α bởi

$$L_\rho - \mathrm{length}(\alpha) := \int_0^1 L_\rho\left(\alpha(t);\dot{\alpha}(t)\right)^{1/2} dt.$$

Với mọi $p, q \in \partial\Omega$, đặt

$$d_H(p,q) = \inf\{L_\rho - \mathrm{length}(\alpha)\},$$

trong đó $\alpha : [0;1] \to \partial\Omega$ là môt đường cong ngang mà $\alpha(0) = p, \alpha(1) = q$. d_H được gọi là metric Carnot-Carathéodory trên $\partial\Omega$.

Tại mỗi điểm $p \in \partial\Omega$, ta tách $\mathbb{C}^n = \mathcal{H}_p\partial\Omega \oplus \mathcal{N}_p\partial\Omega$, trong đó $\mathcal{N}_p\partial\Omega$ là không gian con phức một chiều của $\mathbb{C}^n$ trực giao với $\mathcal{H}_p\partial\Omega$. Như vậy, một véc tơ $z \in \mathbb{C}^n$ có thể viết được duy nhất dưới dạng $z = z_H + z_N$, với $z_H \in \mathcal{H}_p\partial\Omega$ và $z_N \in \mathcal{N}_p\partial\Omega$.

Cho một đường cong ngang $\alpha : [0;1] \to \partial\Omega$, ta có $\dot{\alpha}_N \equiv 0$ và do vậy

$$\mathrm{length}(\alpha) = \int_0^1 |\dot{\alpha}_H(t)| dt.$$

Do Ω là miền giả lồi chặt nên tồn tại một hằng số $c \geq 1$ sao cho

$$\frac{1}{c}|z| \leq L_\rho(p;z)^{1/2} \leq c|z|, \quad \text{với } p \in \partial\Omega, z \in \mathcal{H}_p\partial\Omega. \tag{1.1}$$

Với mỗi $x \in \Omega$, chọn một điểm $\pi(x) \in \partial\Omega$ mà $|x - \pi(x)| = \delta(x)$. Khi đó ta có ánh xạ $\pi : \Omega \to \partial\Omega$. Vì Ω có biên trơn lớp C^2, điểm $\pi(x) \in \partial\Omega$ mà $|x - \pi(x)| = \delta(x)$ là xác định duy nhất nếu x đủ gần biên.
Ta định nghĩa hàm $g : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ bởi

$$g(x, y) = 2\log\left[\frac{d_H(\pi(x), \pi(y)) + h(x) \vee h(y)}{\sqrt{h(x)h(y)}}\right], \qquad (1.2)$$

trong đó $h(x) := \delta(x)^{1/2}$ với $x \in \Omega$, $a \vee b := \max\{a, b\}$ và d_H là metric Carnot-Carathéodory trên $\partial\Omega$.

1.3 Metric Finsler

Cho Ω là một miền trong $\mathbb{C}^n$. Ánh xạ liên tục $F : \Omega \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}_+$ xác định bởi

$$F(x, tz) = |t|F(x, z),$$

với $x \in \Omega, t \in \mathbb{C}, z \in \mathbb{C}^n$ được gọi là một metric Finsler trên Ω.

Hàm khoảng cách d_F liên kết với F được xác định bởi

$$d_F(x, y) = \inf\{F - \text{length}(\gamma)\},$$

trong đó $\gamma : [0; 1] \to \Omega$ là một đường cong trơn từng khúc lớp C^1 sao cho $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$ và

$$F - \text{length}(\gamma) = \int_0^1 F(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))dt.$$

1.4 Metric Kobayashi

Cho D là một đĩa đơn vị trong $\mathbb{C}$, Ω là một miền trong $\mathbb{C}^n$. Nếu $f : D \to \Omega$ là ánh xạ chỉnh hình thì ta kí hiệu $Df(z)$ là ánh xạ vi phân của nó tại điểm $z \in D$.

Metric Kobayashi K trên Ω là metric vi phân xác định bởi:
Với mọi $x \in \Omega, z \in \mathbb{C}^n$ thì

$$K(x, z) = \inf\{|v| : f \in \text{Hol}(D, \Omega), f(0) = x, Df(0)(v) = z\},$$

trong đó $\text{Hol}(D, \Omega)$ là kí hiệu tập các ánh xạ chỉnh hình từ D vào Ω.

Theo một kết quả của Royden, metric Kobayashi là một hàm nửa liên tục trên trên $\Omega \times \mathbb{C}^n$. Khoảng cách Kobayashi d_K là hàm khoảng cách liên kết với metric Kobayashi K. Tức là

$$d_K = \inf\{K - \text{length}(\gamma)\},$$

trong đó $\gamma : [0; 1] \to \Omega$ là đường cong trơn từng khúc lớp C^1 sao cho $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$ và

$$K - \text{length}(\gamma) = \int_0^1 K(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))dt.$$

1.5 Không gian hyperbolic Gromov

Một không gian metric X được gọi là trắc địa nếu bất kì hai điểm x, y thuộc X có thể được nối bởi một đoạn trắc địa, kí hiệu là $[x, y]$. Không gian trắc địa được gọi là $\delta -$ *hyperbolic* nếu với bất kì tam giác trắc địa $[x, y] \cup [y, z] \cup [x, z]$ trong X và bất kì điểm $p \in [x, y]$, ta có:

$$\text{dist}(p, [y, z] \cup [x, z]) \leq \delta.$$

Định nghĩa 1.5.1. Cho $(M, |\cdot|)$ là một không gian metric, với $x, y, p \in M$. Ta định nghĩa tích Gromov của hai điểm x và y trong X ứng với p, kí hiệu là $(x \mid y)_p$ bởi

$$2(x \mid y)_p = |x - p| + |y - p| - |x - y|.$$

Tích Gromov có các tính chất sau:

- $(x \mid y)_p = (y \mid x)_p, (x \mid y)_y = (x \mid y)_x = 0.$
- $|x - y| = (x \mid z)_y + (y \mid z)_x.$
- $0 \leq (x \mid y)_p \leq |x - p| \wedge |y - p|.$
- $|(x \mid y)_p - (x \mid y)_q| \leq |p - q|.$
- $|(x \mid y)_p - (x, z)_p| \leq y - z.$

Ta có định nghĩa sau về không gian hyperbolic Gromov.

Định nghĩa 1.5.2. Cho $M, |\cdot|)$ là một không gian metric, ta nói M là hyperbolic Gromov (hay $\delta -$hyperbolic) nếu tồn tại một hằng số $\delta \geq 0$ sao cho

$$(x \mid z)_p \geq (x \mid y)_p \wedge (y \mid z)_p - \delta, \tag{1.3}$$

với mọi $x, y, z, p \in M$, trong đó $a \wedge b = \min\{a, b\}$.